



MATEMÁTICA

LIBRO CARPETA



puerto de palos



Dinámica Matemática 6



Es una nueva propuesta que facilita el aprendizaje de la matemática a través de 486 actividades que favorecen la comprensión de los distintos temas.



ÍNDICE

Capítulo 1: VECTORES Y FRACTALES

1. Vectores	5
2. Adición y sustracción de vectores	7
3. Producto con vectores. Módulo de un vector	9
4. Ecuación vectorial de la recta	13
5. Noción de fractal	15
Integración final	17
Para recordar	19
Autoevaluación	20

Capítulo 2: NÚMEROS COMPLEJOS

6. El conjunto de los números complejos	21
7. Módulo de un complejo. Forma polar y trigonométrica	23
8. Adición y sustracción	25
Integración 6-7-8	27
9. Potencias de i . Cuadrado y cubo de un complejo	29
10. Multiplicación y división	31
11. Operaciones combinadas	35
Integración final	39
Para recordar	41
Autoevaluación	42

Capítulo 3: FUNCIONES

12. Función parte entera, por partes y valor absoluto	43
13. Función lineal	47
14. Función cuadrática	51
Integración 12-13-14	55
15. Función polinómica	57
16. Función racional	61
17. Función homográfica	63
18. Estudio de funciones	67
Integración final	69
Para recordar	71
Autoevaluación	72

Capítulo 4: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

19. Funciones trigonométricas	73
20. Interpretación y análisis de funciones trigonométricas	77
21. Funciones trigonométricas inversas	79
22. Ecuaciones trigonométricas	81
Integración final	85
Para recordar	87
Autoevaluación	88

Capítulo 5: LÍMITES

23. Concepto intuitivo de límite	89
24. Límite de una función	91
25. Propiedades de los límites	93
26. Límites infinitos	95
Integración 23-24-25-26	97

27. Indeterminaciones del tipo $0/0$	99
28. Indeterminaciones del tipo ∞/∞	101
29. Continuidad de una función en un punto. Discontinuidades	103
30. Asíntotas	105
Integración final	107
Para recordar	109
Autoevaluación	110

Capítulo 6: DERIVADAS

31. Concepto de derivada	111
32. Derivación de funciones elementales	113
33. Derivación de funciones compuestas	117
34. Recta tangente y recta normal	119
Integración 31-32-33-34	121
35. Extremos relativos	123
36. Concavidad	125
37. Análisis y gráfico de funciones	127
38. Optimización	131
Integración final	133
Para recordar	135
Autoevaluación	136

Capítulo 7: INTEGRALES

39. Función primitiva. Integrales definidas	137
40. Integración por sustitución	139
41. Integración por partes	141
42. Integrales definidas. Regla de Barrow	143
43. Cálculo de áreas	145
Integración final	147
Para recordar	149
Autoevaluación	150

Capítulo 8: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

44. Variables aleatorias	151
45. Parámetros de posición y dispersión	153
46. Correlación lineal entre variables aleatorias. Recta de regresión	155
47. Lectura, análisis e interpretación de gráficos de dispersión	157
Integración 44-45-46-47	159
48. Distribuciones continuas	161
49. Distribución normal. Esperanza matemática	163
50. Distribución normal estándar	165
51. Distribución binomial	167
Integración final	171
Para recordar	173
Autoevaluación	174

Tablas de distribución normal y binomial	175
--	-----

1

Vectores y fractales

1. Vectores

► SABERES DINÁMICOS

Un **vector** es un segmento orientado que tiene un origen y un extremo. $\vec{ab}$ es un vector con origen en a y extremo en b. También se lo puede nombrar con una letra minúscula: $\vec{v}$.

Todo vector está caracterizado por una **dirección**, un **sentido** y un **módulo**.

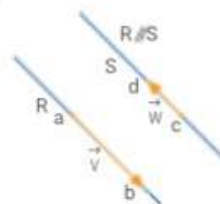
• La dirección de un vector $\vec{v}$, está dada por la recta que lo incluye o recta sostén.

Dos vectores tienen la misma dirección cuando se encuentran sobre una misma recta sostén o en rectas paralelas. Si dos vectores se encuentran sobre la misma recta sostén, son colineales.

• El sentido de un vector $\vec{v}$ está indicado por la orientación de la flecha.

• El módulo $|\vec{v}|$ es la longitud o la medida del vector.

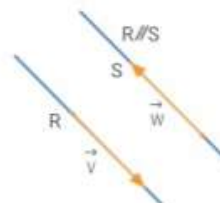
Los vectores $\vec{ab}$ y $\vec{cd}$ tienen la misma dirección, distinto sentido y distinto módulo.



Los vectores que tienen la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo se llaman **vectores equipolentes**.

Si dos vectores tienen el mismo módulo, la misma dirección, pero sentido contrario, se dice que son **vectores opuestos**.

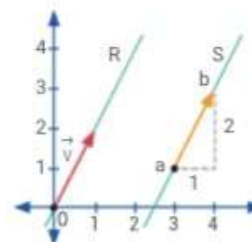
$\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores opuestos.



Vectores referidos al origen de coordenadas

Cuando se representa un vector equipolente a $\vec{ab}$, de forma tal que el origen de este nuevo vector coincide con el origen de coordenadas, se obtiene un **representante canónico**.

$\vec{v}$ es un representante canónico que tiene por componentes (1; 2).
 $\vec{ab} \parallel \vec{v}$ se lee: "vector ab equipolente al vector $\vec{v}$ ".



Cuando el origen de un vector es el origen de coordenadas, las coordenadas del punto extremo coinciden con las componentes del vector.

Dado $\vec{ab}$ tal que $a = (x_a; y_a)$ y $b = (x_b; y_b)$, para hallar las componentes del representante canónico se aplica la siguiente fórmula:

$$\vec{ab} \parallel \vec{v} = (x_b - x_a; y_b - y_a)$$

$$a = (2; -1) \rightarrow b = (1; -3) \Rightarrow \vec{v} = (1 - 2; -3 + 1) \Rightarrow \vec{v} = (-1; -2)$$

TIP

⇒ significa entonces.

El **vector nulo** es aquel en el cual coinciden el origen y el extremo. En símbolos se puede expresar como $\vec{v}_0$ o bien $\vec{0}$. La representación gráfica de $\vec{v}_0$ es un punto y sus coordenadas, (0; 0).

ACTIVIDADES

1. Vectores

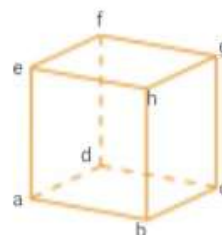
Test de comprensión

1. Respondan y expliquen las respuestas.

- Dos vectores que tienen la misma dirección, ¿son siempre equipolentes?
- Dos vectores que tienen sentidos contrario, a veces ¿son opuestos?
- $\vec{v}$ es un representante canónico que tiene por componentes (3; 5), entonces el módulo de $\vec{v}$, ¿es 8?

2. Completen teniendo en cuenta el siguiente cubo.

- $\vec{ef}$ y $\vec{cb}$ son vectores
- $\vec{ae}$ y $\vec{cg}$ son vectores
- $\vec{eh}$ tiene igual dirección que
- Volumen del cubo = 8 cm^3 , entonces el módulo de $\vec{ad}$ es



3. Observen el siguiente sistema de ejes y resuelvan.

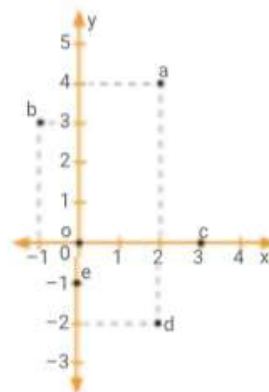
a. Escriban las coordenadas de los puntos indicados.

a = ; b = ; c =

d = ; e =

b. Hallen gráficamente e indiquen sus componentes.

- El representante canónico de $\vec{ba}$ y de $\vec{dc}$.
- El vector opuesto al $\vec{oe}$.
- Un vector equipolente al $\vec{oc}$.
- Un vector de igual dirección que $\vec{ed}$ y distinto módulo.



4. Completen la siguiente tabla.

Componentes del vector	Origen del vector	Extremo del vector
(2; -2)	(1; 3)	
($\sqrt{2}$; 3)		($2\sqrt{2}$; 0)
	($-\frac{1}{2}$; -2)	(1; 3)

5. Hallen los valores de a y b en cada caso.

Para recordar pág. 19

a. Componentes del vector = (a; -1); origen del vector = (3; -b) y el extremo = (5; -2).

b. Componentes del vector = (-2; b); origen del vector = (-1; a) y el extremo = (b; 2a).

c. Componentes del vector = (5; -5); origen del vector = (a; b) y el extremo = (3b; 2a).

2. Adición y sustracción de vectores

► SABERES DINÁMICOS

Las componentes del vector suma o resta son iguales a la suma o a la resta de las componentes de los vectores sumados.

$$\vec{v} = (v_x; v_y) \wedge \vec{w} = (w_x; w_y) \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} = (v_x + w_x; v_y + w_y)$$

$$\vec{v} = (v_x; v_y) \wedge \vec{w} = (w_x; w_y) \Rightarrow \vec{v} - \vec{w} = (v_x - w_x; v_y - w_y)$$

TIP

$\wedge$ significa y.

Sean: $\vec{v} = (2; -3)$ y $\vec{w} = (1; 2)$

$$\vec{v} + \vec{w} = (2; -3) + (1; 2)$$

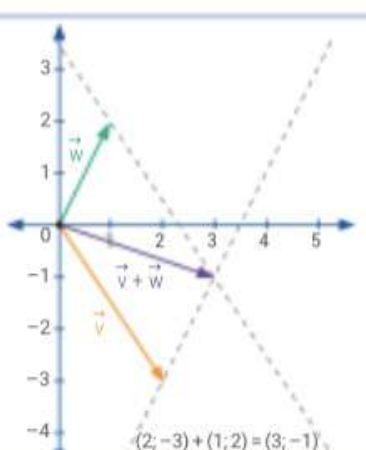
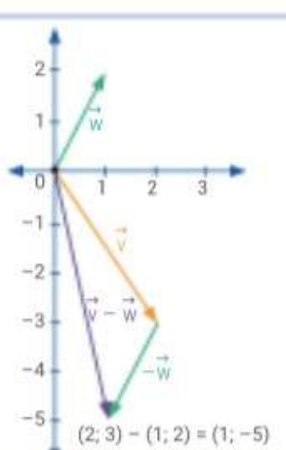
$$\vec{v} + \vec{w} = (2 + 1; -3 + 2) = (3; -1)$$

$$\vec{v} - \vec{w} = (2; -3) + (1; 2)$$

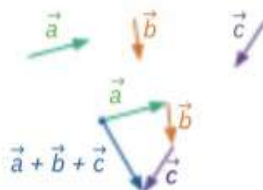
$$\vec{v} - \vec{w} = (2 - 1; -3 - 2) = (1; -5)$$

Para **sumar gráficamente**, se debe emplear la regla del paralelogramo o bien la regla de la polygonal.

Para **restar gráficamente**, se suma el opuesto del segundo vector.

Regla del paralelogramo	Regla de la polygonal
Se grafican los vectores con el origen en común. Por el extremo de cada uno de ellos se traza una paralela al otro vector, determinando un paralelogramo. La diagonal del paralelogramo, con origen en el origen de los vectores sumados, es el vector suma.	Se grafica un vector y a continuación, desde el extremo de este, se grafica el otro vector, cuidando de mantener la equipolencia. El vector suma es el que queda determinado por el origen del primer vector y el extremo del segundo.
	

Cuando se tienen que sumar más de dos vectores, conviene utilizar la regla de la polygonal.



ACTIVIDADES

Adición y sustracción de vectores

de comprensión

Respondan y expliquen las respuestas.

La resta de dos vectores ¿es conmutativa?

La resultante de la suma de vectores ¿puede ser el vector nulo?

$|\vec{a}| = 2$ y $|\vec{b}| = 3$, entonces $|\vec{a} + \vec{b}|$ ¿es siempre 5?



7. Resuelvan analítica y gráficamente (apliquen la regla indicada en cada caso).

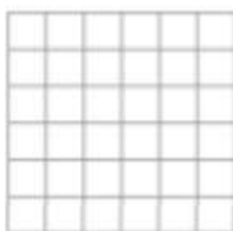


Sean los vectores: $\vec{a} = (-2; -3)$; $\vec{b} = (1; -2)$; $\vec{c} = (0; 5)$ y $\vec{d} = (-2; 0)$.

a. $\vec{a} - \vec{b} =$

• Analíticamente: _____

• Gráficamente (regla del paralelogramo):



c. $\vec{b} - \vec{a} - \vec{c} =$

• Analíticamente: _____

• Gráficamente (regla de la poligonal):



b. $\vec{c} + \vec{d} =$

• Analíticamente: _____

• Gráficamente (regla del paralelogramo):



d. $\vec{c} + \vec{d} + \vec{b} =$

• Analíticamente: _____

• Gráficamente (regla de la poligonal):



8. Hallen el valor de a y b en cada caso.

a. $(-3; 2b - 4) + (-2; 1) = (a; 5)$

a = _____ b = _____

b. $(a - b; 1) - (b; -3) = (-2; a)$

a = _____ b = _____

c. $(2a; a + b) + (3; 2b) = (5; 6)$

a = _____ b = _____

3. Producto con vectores. Módulo de un vector

► SABERES DINÁMICOS

Producto de un escalar por un vector

$$\alpha \cdot \vec{v} = (\alpha \cdot v_x; \alpha \cdot v_y)$$

El **producto** de un **escalar** α por un **vector** $\vec{v}$ es un vector $\vec{w}$ que cumple con las siguientes condiciones:

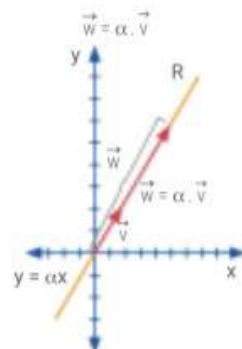
- Tiene la misma dirección que $\vec{v}$.
- Su módulo es igual a $|\alpha|$ veces el módulo de $\vec{v}$.
- El sentido es el mismo que el de $\vec{v}$ si $\alpha > 0$ y opuesto si $\alpha < 0$.

Cuando un vector $\vec{w}$ puede expresarse como el producto entre un escalar distinto de cero y un vector $\vec{v}$, se dice que los vectores son **linealmente dependientes**.

La dirección de ambos vectores está dada por una recta sostén de ecuación $y = \alpha \cdot x$.

Si $\vec{w} = \alpha \cdot \vec{v}$, entonces $\vec{w}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes.

En particular, si $\alpha = 0$, lo que se obtiene es el **vector nulo** y si $\alpha = -1$, se obtiene el **vector opuesto**.

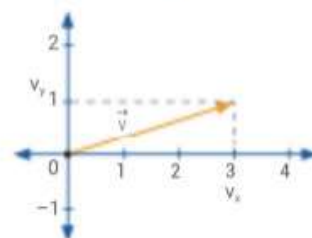


Módulo de un vector

El **módulo** de un vector se calcula mediante el teorema de Pitágoras.

Como el módulo es la longitud de un segmento, resulta siempre que $|\vec{v}| \geq 0$.

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$



Para un vector $\vec{v} = (3; 1)$, su módulo es: $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 1^2} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{10}$

El módulo de un vector, dados su origen y su extremo, es: $|\vec{ab}| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$

Producto escalar de dos vectores

El **producto escalar** entre dos vectores da por resultado un **número real** y se define, en función de sus componentes, como:

$$\vec{v} = (v_x; v_y) \wedge \vec{w} = (w_x; w_y) \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y$$

$$\vec{v} = (2; 3) \wedge \vec{w} = (-1; 2) \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 4$$

Interpretación geométrica del producto escalar

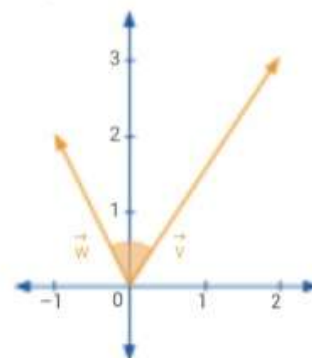
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \widehat{v w}$$

El ángulo determinado por los dos vectores se calcula despejando la fórmula anterior.

$$\widehat{v w} = \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

$$\widehat{v w} = \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \arccos \frac{4}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{5}} = \arccos 0,496 =$$

$$\widehat{v w} = 60^\circ 14' 45,41''$$



ACTIVIDADES

3. Producto con vectores. Módulo de un vector

Test de comprensión

9. Respondan y expliquen las respuestas.

- El producto escalar de dos vectores opuestos ¿es cero?
- $|\vec{v}| = 2$ y $|\vec{w}| = 3$, es cierto que $\vec{v} \cdot \vec{w}$ es siempre 6?
- El producto escalar entre dos vectores colineales del mismo sentido ¿es igual al producto de los módulos de cada vector?

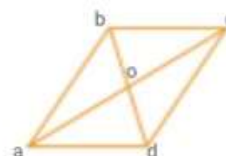
10. Completen con el vector correspondiente.

a. $\vec{ab} + \vec{od} =$

b. $\vec{bc} + \vec{cd} =$

c. $\vec{ab} + \vec{bc} + \vec{ca} =$

d. $\vec{ab} - \vec{da} =$



11. Resuelvan teniendo en cuenta los vectores.

$$\vec{v} = (3; 2) \text{ y } \vec{w} = (-1; -2)$$

a. $|\vec{v}| =$

d. $|\vec{v}| + |\vec{w}| =$

b. $|\vec{w}| =$

e. $\vec{v} \cdot \vec{w} =$

c. $|\vec{v} - \vec{w}| =$

f. $\widehat{\vec{v} \vec{w}} =$



12. Reúnanse con un compañero y hallen el valor de k para que los vectores sean linealmente dependientes, es decir, que sus componentes sean proporcionales.

a. $\vec{v} = (2; 5)$ y $\vec{w} = (k; -15)$

b. $\vec{v} = \left(k; \frac{1}{2}\right)$ y $\vec{w} = (5; 2)$

c. $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}; k\right)$ y $\vec{w} = (2; k - 3)$

13. Hallen a y b para que cumplan las condiciones en cada caso.

a. $(-3; 5) \cdot a + (-1; b) = \vec{0}$

c. $(-3; 5) = a \cdot (2; 3) + b \cdot (-1; 2)$

b. $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{8}; a) - (b; 0) = (6; \sqrt{2})$

d. $(a + b; 3) = (2; a - b)$

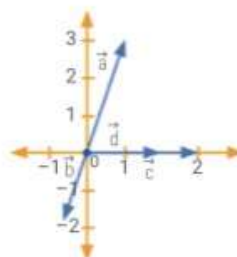
14. Completen con el escalar que verifique la igualdad en cada caso.

a. $\vec{a} = \text{---} \cdot \vec{b}$

c. $\vec{c} = \text{---} \cdot \vec{d}$

b. $\vec{b} = \text{---} \cdot \vec{a}$

d. $\vec{d} = \text{---} \cdot \vec{c}$

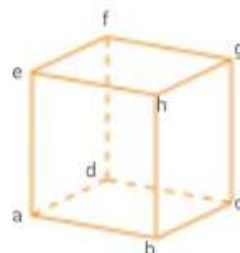


3. Producto con vectores. Módulo de un vector

15. Observen la figura y resuelvan, sabiendo que volumen del cubo = 125 cm^3 .

Para recordar pág. 19

- $\vec{db} + \vec{bh} =$
- $\vec{ef} + \vec{fg} =$
- $|\vec{eg}| =$
- $|\vec{dh}| =$
- $\vec{ab} \cdot \vec{ae} =$
- $\vec{ae} \cdot \vec{gc} =$

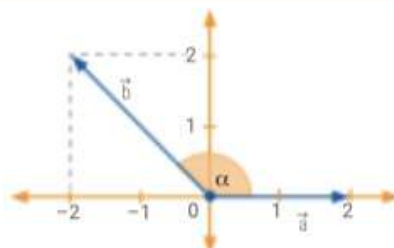


16. Tengan en cuenta que un versor ($\hat{v}$) es un vector cuyo módulo es igual a 1 y $\hat{i} = (1; 0)$, $\hat{j} = (0; 1)$ y expresen cada vector como $\vec{v} = v_x \cdot \hat{i} + v_y \cdot \hat{j}$.

- $\vec{a} = (2; -5)$ $\hat{a} =$
- $\vec{b} = (-3; 1)$ $\hat{b} =$
- $\vec{c} = (1; 1)$ $\hat{c} =$
- $\vec{d} = (-2; 0)$ $\hat{d} =$
- $\vec{e} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) - \vec{c}$ $\hat{e} =$

17. Calculen lo pedido en cada uno de los siguientes casos.

- $a = (3; -2)$; $b = (2; 1)$
 $|\vec{ab}| =$ Componente del $\vec{ab} =$
- $\vec{a} = \sqrt{2}\hat{i} + \sqrt{3}\hat{j}$; $\vec{b} = \sqrt{2}\hat{i} - \sqrt{3}\hat{j}$
 $\widehat{\vec{a}\vec{b}} =$
- $\vec{a} = (-3; 0)$; $\vec{b} = (2; 0)$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ $\widehat{\vec{a}\vec{b}} =$
- $\vec{a} = (-k; 2)$; $\vec{b} = (1; k+1)$; $\vec{a}$ es perpendicular a $\vec{b}$.
 $k =$
-



- $\hat{\alpha} =$
- $\vec{a} = (k; k+1)$; $|\vec{a}| = 5$
 $k =$

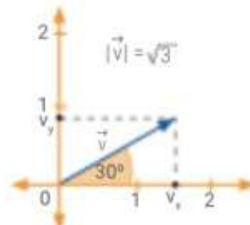
Para recordar pág. 19

ACTIVIDADES

3. Producto con vectores. Módulo de un vector

18. Observen el siguiente gráfico y resuelvan.

Para recordar pág. 19

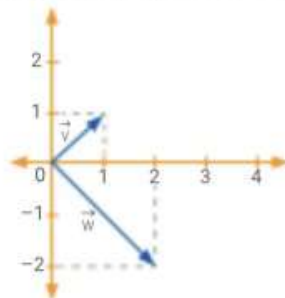


$v_x =$

$v_y =$

$\vec{v} =$

19. Demuestren que $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{w}$.





20. Lean atentamente y respondan.

Un bote se desplaza a una velocidad relativa al agua de $\vec{v}_b = 4$ m/s. La velocidad del agua es $\vec{v}_a = 3$ m/s. Calculen:



a. La velocidad del bote respecto a la tierra, si se desplaza en el mismo sentido que la corriente.

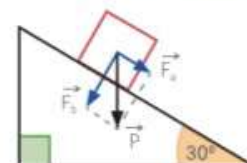
b. La velocidad del bote respecto a la tierra, si se desplaza en sentido contrario a la corriente.

c. El tiempo, en minutos, que tarda el bote en desplazarse una distancia de 500 m hasta el punto "p" y regresar al punto de partida "o". Consideren cada tramo a la velocidad constante.

DinámicaMente

Un paquete que pesa 20 kg se desliza por un plano inclinado que forma 30° con la horizontal. Calculen la intensidad de las fuerzas $\vec{F}_a$ y $\vec{F}_b$, siendo $\vec{F}_a$ la fuerza que lo hace deslizar por el plano y $\vec{F}_b$ la fuerza que adhiere el paquete al plano inclinado.

Para recordar pág. 19



4. Ecuación vectorial de la recta

► SABERES DINÁMICOS

Un vector está **asociado** a una recta cuando tiene su misma dirección, es decir, que puede estar incluido en la recta o en una paralela a ella. Dados un punto p_0 perteneciente a una recta R y un vector $\vec{v}$ asociado a ella, se puede hallar su **ecuación vectorial**.

Cualquier punto p , perteneciente a la recta R , determina con el punto p_0 un vector $\vec{p_0p}$ paralelo al vector asociado.

$$\vec{p} = \vec{p_0} + \vec{p_0p} \quad (1)$$

Como $\vec{p_0p}$ es paralelo a $\vec{v}$, resulta:

$$\vec{p_0p} = \alpha \cdot \vec{v} \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1), se obtiene:

$$\vec{p} = \vec{p_0} + \alpha \cdot \vec{v} \quad \alpha \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Ecuación vectorial de la recta.}$$

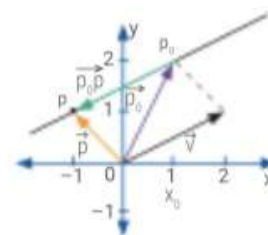
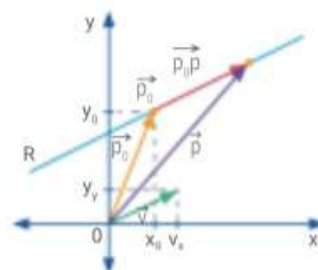
$$R: (x; y) = (x_0; y_0) + \alpha \cdot (v_x; v_y) \rightarrow \text{En función de las componentes de cada vector.}$$

$$\vec{v} = (2; 1) \text{ y } \vec{p_0} = (1; 2)$$

La ecuación vectorial de la recta A es: $A = (x; y) = (1; 2) + \alpha \cdot (2; 1)$

Asignándole valores a α , se obtienen todos los puntos de la recta.

$$\alpha = -1 \Rightarrow p = (1; 2) + (-1) \cdot (2; 1) \Rightarrow p = (-1; 1)$$



Relación entre la ecuación vectorial y la explícita

Ecuación vectorial	Ecuación explícita
$R: (x; y) = (x_0; y_0) + \alpha \cdot (v_x; v_y)$	$y = \frac{v_y}{v_x} \cdot x + b$

Dados $p_0 = (-1; 3)$ y $\vec{v} = (3; -2)$, siendo $\vec{v}$ un vector asociado a la recta R , hallen su ecuación explícita.

$$R: (x; y) = \underline{(-1; 3) + \alpha \cdot (3; -2)} \Rightarrow R: (x; y) = (-1 + 3\alpha; 3 - 2\alpha)$$

Ecuación vectorial

$$R: \begin{cases} x = -1 + 3\alpha \Rightarrow \frac{x+1}{3} = \alpha \\ y = 3 - 2\alpha \Rightarrow \frac{y-3}{-2} = \alpha \end{cases}$$

$$R: \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-2} \Rightarrow R: -2 \cdot (x+1) = 3 \cdot (y-3) \Rightarrow R: -2x - 2 = 3y - 9 \Rightarrow R: 3y = -2x - 2 + 9$$

$$\Rightarrow R: -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \text{ Ecuación explícita}$$

TIP

significa **pertenece**.

Dinámica TConecta

Ingresa en puerto.pub/evvec * para mirar un video donde se explica un ejemplo acerca de la ecuación vectorial de la recta.

* Enlace acortado de <https://youtu.be/mGJg0nNtc0?c=287>

ACTIVIDADES

4. Ecuación vectorial de la recta

Test de comprensión

21. Respondan y expliquen las respuestas.

- El punto $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ¿pertenece a la recta $R: (x; y) = \alpha \cdot (1; 2)$?
- $(9; 11) \in R: (x; y) = (1; -1) + \alpha \cdot (2; 3)$, entonces ¿ $\alpha = 4$?
- La pendiente de $R: (x; y) = (2 + 2\alpha; 3 + \alpha)$ ¿es 2?

22. Marquen con una X la respuesta correcta.

a. El punto $(x; y)$ que pertenece a la recta $R: (x; y) = (2; 3) + \alpha \cdot (2; 1)$ es:

- $(4; -4)$ ☐ • $(0; 3)$ ☐ • $(-2; 1)$ ☐

b. $R: (x; y) = \alpha \cdot (-1; 3)$ es la recta:

- $y = -x + 3$ ☐ • $y = -3x$ ☐ • $y = \frac{1}{3}x$ ☐

23. Determinen el valor de k para que cumpla las condiciones.

Para recordar pág. 19

- $\left(k; \frac{3}{5}\right) \in R: (x; y) = \alpha \cdot (1; 3)$ _____
- $y = kx + 1$ sea paralela a $R: (x; y) = (2; 1) + \alpha \cdot (2; 5)$ _____
- $y = kx + 1$ sea perpendicular a $R: (x; y) = (2; 1) + \alpha \cdot (2; 5)$ _____

24. Resuelvan dados los puntos $a = (-1; 1)$ y $b = (1; -3)$.

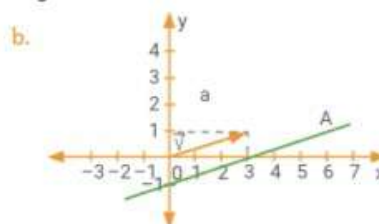
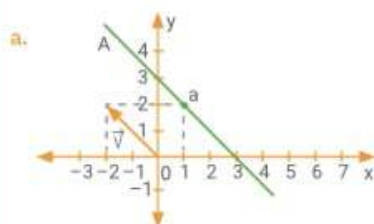
a. Hallen la ecuación vectorial de la recta M que pasa por el punto $(5; 2)$ y es paralela a $\vec{ab}$.

b. Hallen la ecuación vectorial de la recta N que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a $\vec{ab}$.

25. Resuelvan sabiendo que $p = (2; 9)$ y $q = (3; 7)$.

- Hallen las componentes de $\vec{pq}$. _____
- Hallen la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos p y q . _____
- ¿Cuál es la pendiente de esa recta? _____

26. Encuentren la ecuación vectorial de cada una de las siguientes rectas. Escriban la ecuación explícita.



5. Noción de fractal

► SABERES DINÁMICOS

Un **fractal** es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o aparentemente irregular, se repite a diferentes escalas, es decir, tiene la propiedad de autosimilitud.

Muchas estructuras naturales son de tipo fractal. La propiedad matemática clave de un objeto genuinamente fractal es que su dimensión métrica fractal no es un número entero.

Dinámica T Conecta

Ingresa en [puerto.pub/fract1](https://www.youtube.com/watch?v=4u-71w5wo0rU&list=PL4u-71w5wo0rU) y en [puerto.pub/fract2](https://www.youtube.com/watch?v=4u-71w5wo0rU&list=PL4u-71w5wo0rU) ** para conocer más acerca de los fractales y su aplicaciones.

Enlaces acortados de ** <https://www.youtube.com/watch?v=4u-71w5wo0rU&list=PL4u-71w5wo0rU> y de ** <https://www.meteorologiasenred.com/fractales.html>

Las siguientes imágenes corresponden a una secuencia de figuras donde se repite la misma estructura y se forma un fractal.

Figura 1



Figura 2



Figura 3



Figura 4



En este caso, se realizaron los siguientes pasos:

1. Al segmento de la figura se lo divide en tres partes iguales, se borra el segmento del medio y se dibujan otros dos de la misma medida, como se ve en la figura 2.
2. Se hace lo mismo con cada uno de los segmentos que quedan determinados.
3. Se continúa de la misma manera hasta que no sea posible seguir dibujando.

Como resultado de esta construcción, en cada paso el perímetro de la figura se multiplica por $\frac{4}{3}$.

Este fractal recibe el nombre de **Curva de Koch**.

Áreas dinámicas [Matemática y Física]

El movimiento browniano es el movimiento aleatorio que se observa en algunas partículas microscópicas que se hallan en un medio fluido (por ejemplo, polen en una gota de agua). La trayectoria de una partícula en movimiento browniano fue uno de los primeros fenómenos naturales en los que se reconoció una autosimilitud a diferentes escalas de aumento.



5. Noción de fractal

Test de comprensión

27. Respondan y expliquen las respuestas.

- La dimensión de un fractal ¿puede ser $\frac{9}{4}$?
- La estructura de un fractal ¿se puede repetir solo un número finito de veces?
- Una pequeña sección del fractal, ¿puede ser vista como una réplica a menor escala de todo el fractal?

28. Observen la siguiente secuencia que genera la Salchicha de Minkowski y resuelvan.

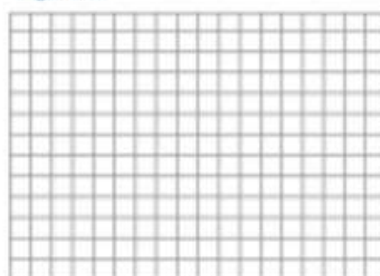
Figura 1



Figura 2



Figura 3



- Reiteren el proceso una vez más.
- Expliquen con sus palabras el proceso de formación del fractal.

29. Dibujen teniendo en cuenta la siguiente secuencia.

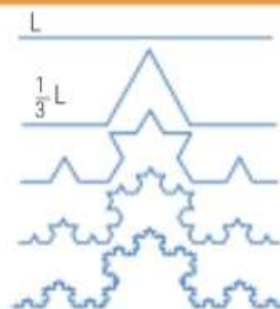
- Dibujen un segmento (utilicen un papel afiche).
- Dividan en tres segmentos iguales y descarten el segmento del medio.
- Reiteren el proceso con los restantes segmentos.
- Comparen sus producciones con el resto de los compañeros.

DinámicaMente



Observen la figura y resuelvan teniendo en cuenta que $L = 12$ cm.

- Calculen el perímetro de las primeras tres figuras.
- Hallen una fórmula en función de L que permita calcular el perímetro.



Integración final

1

30. Resuelvan lo pedido en cada caso teniendo en cuenta los puntos.

$a = (-2; 1)$, $b = (1; 1)$ y $c = (0; 3)$

- Hallen las componentes de $\vec{ab}$ y $\vec{ba}$.
- Resuelvan analítica y gráficamente $\vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b}$ y $\frac{1}{2}(\vec{c} + 3\vec{b})$.
- Calculen el módulo de $|\vec{bc}|$, $|\vec{ba} + \vec{ac}|$ y $|\vec{ba}| + |\vec{ac}|$.

31. Hallen el valor de k en cada caso.

Para recordar pág. 19

- $v = (k; 4)$, $w = (6; k + 5)$ y $|\vec{vw}| = 5$. Indiquen si ese valor es único y comprueben gráficamente.
- $\vec{u} = (k; 2)$ es linealmente dependiente con $\vec{v} = (k + 1; -1)$.
- $\vec{u} = (k - 4; 2)$ y $\vec{v} = (k; 2)$ son perpendiculares. Indiquen si ese valor es único.

32. Hallen los componentes de $\vec{x}$ para que se verifiquen las siguientes igualdades.

$\vec{u} = (0; -2)$; $\vec{v} = (-1; 4)$; $\vec{w} = (-3; 2)$

- $3\vec{v} - \vec{u} + \vec{x} = 0$
- $\vec{u} + 3(\vec{w} - \vec{v}) = 2\vec{x} - \vec{v}$
- $\vec{x} - (\vec{u} - \vec{w}) = 2\vec{w}$
- $\frac{1}{2}(-\vec{u} - \vec{w}) = 2\vec{x}$

33. Marquen la respuesta correcta.

a. Un vector paralelo a $\vec{v} + 3\vec{w}$ es:

$\cdot 3\vec{w}$

☐

$\cdot 2\vec{v} + 6\vec{w}$

☐

$\cdot 2\vec{v}$

☐

b. $\vec{v} = (-3; 2)$ es perpendicular al vector:

$\cdot \vec{w} = (2; -3)$

☐

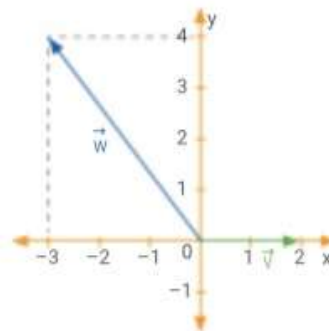
$\cdot \vec{w} = (2; 3)$

☐

$\cdot \vec{w} = (3; -2)$

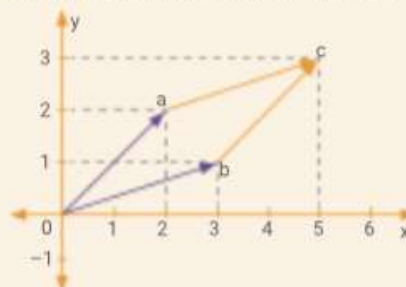
☐

34. Observen el siguiente gráfico y resuelvan.



- Las componentes de $\vec{v} - \vec{w}$.
- El módulo de cada vector.
- $\vec{v} \cdot \vec{w} =$
- $\vec{v} \cdot (-\vec{w}) =$
- El ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

35. Reúnanse con un compañero y resuelvan.



- Demuestren que $\vec{oa}$ es equipolente a $\vec{bc}$, y $\vec{ac}$ es equipolente a $\vec{ob}$.
- Calculen el perímetro del oabc.
- Calculen los ángulos internos del oabc.

36. Grafiquen el triángulo abc, sabiendo que $a = (5; 2)$, $b = (3; 0)$ y $c = (1; 6)$.

- Demuestren que es rectángulo.
- Calculen el área.

37. Indiquen si los siguientes puntos pertenecen a $R: (x; y) = k \cdot (4; -1) + (5; 1)$. En caso afirmativo, indiquen el valor de k .

- a. $(10; 2)$ c. $(5; 1)$
b. $(1; 2)$ d. $(7; 0,5)$

38. Hallen la ecuación vectorial de cada una de las siguientes rectas.

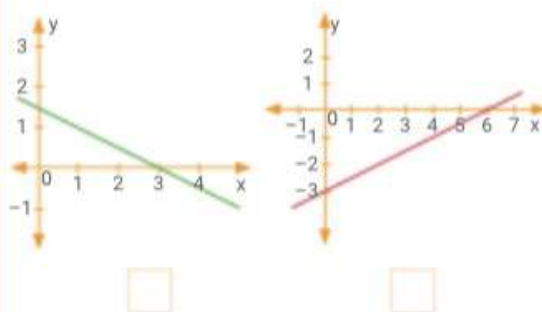
- a. A: pasa por $a = (2; -1)$ y tiene la misma dirección que $\vec{v} = (1; 2)$.
b. B: pasa por el origen de coordenadas y es paralela a $\vec{v} = (3; -1)$.
c. C: pasa por $b = (-1; 3)$ y es paralela a la recta $\frac{y}{2} + 1 = 2x + 2$.
d. D: pasa por $q = (3; -2)$ y tiene pendiente $-\frac{3}{4}$.
e. E: es paralela al vector $\vec{u} = \sqrt{3}\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j}$ y pasa por $p = (2; 2)$.
f. F: pasa por $p = (-2; 5)$ y es perpendicular a la recta $R: (x; y) = (2; -1) + k(-1; 3)$.

39. Hallen el valor de a y b en cada caso.

- a. $(2a - 1; 6) \in R: (x; y) = (2; 5b + 1) - 3(a; 2)$
b. $(-1; 2) \in R: (x; y) = (a + 2b; b) + (a; b - a)$
c. $R: (x; y) = (1; 2) + 3(a; b)$ es paralela a la recta $y = -\frac{3}{4}x + 2$. ¿Existe una única solución?

40. Marquen con una X lo pedido en cada caso.

- a. El gráfico correspondiente a $R: (x; y) = k(-2; 1) + (3; 0)$.

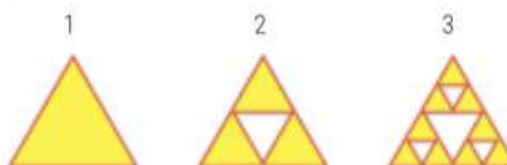


b. Una recta perpendicular a $R: (x; y) = k(-2; 1) + (3; 0)$.

- $y = -\frac{1}{2}x + 2$
• $y = 2x + 2$
• $y = \frac{1}{2}x + 2$

☐
☐
☐

41. Observen la siguiente secuencia y resuelvan.



Perímetro₁ = 3; área₁ = $\frac{\sqrt{3}}{4}$

a. Calculen el número de triángulos sombreados de cada uno de los sucesivos pasos y escriban la sucesión que se forma.

Para recordar pág. 19

b. ¿Qué tipo de sucesión es?

c. Escriban su término general.

d. Calculen cuántos triángulos sombreados se generarán cuando hayan aplicado 20 veces el mismo procedimiento.

e. Calculen el perímetro y el área de las cuatro primeras figuras.

Cantidad de triángulos sombreados	Perímetro de triángulos sombreados	Área de triángulos sombreados
1	3	0,43
2		
3		
4		

f. Indiquen qué sucede con el perímetro y con el área de la figura sombreada a medida que crece el número de veces que aplicamos el procedimiento.

g. Hallen una fórmula que permita calcular el área en función de A_1 .

Para recordar

Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.



Propiedad conmutativa de una operación en un conjunto dado

A es un conjunto y $*$ es una operación definida en ese conjunto $\rightarrow a \in A; b \in A$, entonces $a*b = b*a$.

Razones trigonométricas definidas en un triángulo rectángulo

$$\operatorname{sen} \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto opuesto al } \hat{\alpha}}{\text{hipotenusa}} \quad \cos \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto adyacente al } \hat{\alpha}}{\text{hipotenusa}} \quad \operatorname{tg} \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto opuesto al } \hat{\alpha}}{\text{cateto adyacente al } \hat{\alpha}}$$

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$\text{Hipotenusa}^2 = \text{Cateto}_1^2 + \text{Cateto}_2^2$$

Ecuación explícita de la recta

$y = mx + b \rightarrow$ donde m es la pendiente y b es la ordenada al origen.

Condición de paralelismo entre rectas

$$y_1 = m_1x + b \wedge y_2 = m_2x + c$$

$$m_1 = m_2 \Leftrightarrow y_1 // y_2$$

TIP

$\Leftrightarrow$ significa si y solo si.

Condición de perpendicularidad entre rectas

$$y_1 = m_1x + b \text{ e } y_2 = m_2x + c$$

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \Leftrightarrow y_1 \perp y_2$$

Resolución sistema de ecuaciones. Método de igualación

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases} \quad ax + b = cx + d \Rightarrow x = \frac{d-b}{a-c} \rightarrow \text{para hallar el valor de } y \text{ se reemplaza } x \text{ en cualquiera de las dos ecuaciones.}$$

Resolución ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sucesión

Una **sucesión** es un conjunto ordenado de números, uno a continuación del otro.

Se denomina **sucesión aritmética** a aquella en la cual cada término de la misma se obtiene sumando al anterior un número constante r llamado razón aritmética.

Se denomina **sucesión geométrica** a aquella en la cual cada término de la misma se obtiene multiplicando al anterior por un número constante q llamado razón geométrica.

Marquen la opción correcta

42. Si $m = (-2; -1)$; $n = (3; 2)$, ¿cuáles son las componentes de $\vec{mn}$?

☐ $(5; 3)$
☐ $(1; 1)$
☐ $(-5; -3)$

43. Si $\vec{v} = (3; -2)$, $\vec{w} = (k - 3; k + 1)$ y $\vec{v} \parallel \vec{w}$, ¿cuál es el valor de k ?

☐ $k = 3$
☐ $k = \frac{5}{3}$
☐ $k = \frac{3}{5}$

44. Si $|\vec{a}| = 3$ y $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{a} + \vec{b}|$ ¿es igual que 7, menor o igual que 7 o mayor que 7?

☐ $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$
☐ $|\vec{a} + \vec{b}| \leq 7$
☐ $|\vec{a} + \vec{b}| > 7$

45. ¿Cuál es el valor de k para que $a = (2; -1)$; $b = (3; 2)$; $c = (k; 0)$ estén alineados?

☐ $k = \frac{7}{3}$
☐ $k = \frac{1}{3}$
☐ $k = -\frac{7}{3}$

46. ¿Cuál es la pendiente de la recta $R: (x; y) = (-3; 2) + \alpha \cdot (-1; 5)$?

☐ $\frac{1}{5}$
☐ 5

☐ -5

47. ¿Cuál es la ecuación explícita de la recta $R: (x; y) = (0; 5) + \alpha \cdot (1; -3)$?

☐ $y = -3x$
☐ $y = -3x + 5$
☐ $y = \frac{1}{3}x + 5$

48. ¿Cuál es el producto escalar entre $\vec{v} = (3; -1)$ y $\vec{w} = (-3; 1)$?

☐ 0

☐ -10

☐ 9

49. Los fractales ¿son autosemejantes a cualquier escala?

☐ Siempre.

☐ A veces.

☐ Nunca.